|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА **«Обработка результатов эксперимента»** | | | | | Цель работы: *Изучение возможностей пакета Ms Excel при решении задач обработки экспериментальных данных. Приобретение навыков обработки результатов эксперимента.*  Одной из распространенных задач в науке, технике, экономике является аппроксимация экспериментальных данных, алгебраических данных аналитическими выражениями. Возможность подобрать параметры уравнения таким образом, чтобы его решение совпало с данными эксперимента, зачастую является доказательством (или опровержением) теории.  Рассмотрим следующую математическую задачу. Известные значения некоторой функции ***f*** образуют таблицу:   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Таблица 1 | | | | | | **x** | **x1** | **x2** | **. . .** | **xn** | | ***f(x)*** | **y1** | **y2** | **. . .** | **yn** |   Необходимо построить аналитическую зависимость **y = *f*(x)**, наиболее близко описывающую результаты эксперимента. Построим функцию **y = *f*(x, a0, a1, ..., ak)** таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений **yi** от расчетных ***f*(xi ,a0, a1, ..., ak)** была наименьшей (см. рис. 1).   |  | | --- | | Рис. 8.1 | | Рис. 1 |   Математически эта задача равносильна следующей: найти значение параметров **a0, a1, a2, ...,ak**, при которых функция принимала бы минимальное значение.   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for1.gif | (1) |   Эта задача сводится к решению системы уравнений:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for2.gif | (2) |   Если параметры ai входят в зависимость **y = *f*(x,ao, a1, …, ak)** линейно, то мы получим систему линейных уравнений:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for3.gif | (3) |   Решив систему (3), найдем параметры **ao, a1, ..., ak** и получим зависимость **y = *f*(x, ao, a1, ..., ak)**.  **Линейная функция (линия регрессии)**  Необходимо определить параметры функции **y = ax+b**. Составим функцию **S**:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for4.gif | (4) |   Продифференцируем выражение (4) по **a** и **b**, сформируем систему линейных уравнений, решив которую мы получим следующие значения параметров:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for5.gif | (5) |   Подобранная прямая называется **линией регрессии** y на x, a и b называются **коэффициентами регрессии**.  Чем меньше величина   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for6.gif |   тем более обосновано предположение, что табличная зависимость описывается линейной функцией. Существует показатель, характеризующий тесноту линейной связи между **x** и **y**. Это **коэффициент корреляции**. Он рассчитывается по формуле:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for7.gif |   Коэффициент корреляции **r** и коэффициент регрессии **a** связаны соотношением:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for8.gif |   где **Dy, Dx** - среднеквадратичное отклонение значений **x** и **y**.   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for9.gif |   Значение коэффициента корреляции удовлетворяет соотношению **-1 ≤ r ≤ 1**. Чем меньше отличается абсолютная величина **r** от единицы, тем ближе к линии регрессии располагаются экспериментальные точки. Если коэффициент корреляции равен нулю, то переменные **x, y** называются **некоррелированными**. Если **r** = 0, то это только означает, что между **x, y** не существует линейной связи, но между ними может существовать зависимость, отличная от линейной.  Для того чтобы проверить, значимо ли отличается от нуля коэффициент корреляции, можно использовать **критерий Стьюдента**. Вычисленное значение критерия определяется по формуле:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for10.gif |   Значение **t** сравнивается со значением, взятым из таблицы распределения Стьюдента в соответствии с уровнем значимости **a** и числом степеней свободы **n-2**. Если **t** больше табличного, то коэффициент корреляции значимо отличен от нуля.  **Решение поставленной задачи средствами MS Excel**  Вычисление коэффициентов регрессии осуществляется с помощью функции ЛИНЕЙН():  **ЛИНЕЙН(Значения\_y; Значения\_x; Конст; статистика)**  **Значения\_y - массив значений y**.  **Значения\_x**- необязательный массив значений **x**, если массив **х** опущен, то предполагается, что это массив **{1;2;3;...}** такого же размера, как и **Значения\_y**.  **Конст** - логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа **b** была равна 0. Если **Конст** имеет значение **ИСТИНА** или опущено, то **b** вычисляется обычным образом. Если аргумент **Конст** имеет значение **ЛОЖЬ**, то **b** полагается равным 0 и значения **a** подбираются так, чтобы выполнялось соотношение **y = ax**.  **Статистика** - логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии. Если аргумент статистика имеет значение **ИСТИНА**, то функция **ЛИНЕЙН** возвращает дополнительную регрессионную статистику. Если аргумент статистика имеет значение **ЛОЖЬ** или опущен, то функция **ЛИНЕЙН** возвращает только коэффициент **a** и постоянную **b**.  Для вычисления множества точек на линии регрессии используется функция **ТЕНДЕНЦИЯ**.  **ТЕНДЕНЦИЯ(Значения\_y; Значения\_x; Новые\_значения\_x; Конст)**  **Значения\_y**- массив значений **y**, которые уже известны для соотношения **y = ax + b**.  **Значения\_x**- массив значений **x**.  **Новые\_значения\_x**- новый массив значений, для которых **ТЕНДЕНЦИЯ** возвращает соответствующие значения **y**. Если **Новые\_значения\_x** опущены, то предполагается, что они совпадают с массивом значений **х**.  **Конст** - логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа **b** была равна 0. Если **Конст** имеет значение **ИСТИНА** или опущено, то **b** вычисляется обычным образом. Если **Конст** имеет значение **ЛОЖЬ**, то **b** полагается равным 0, и значения **а** подбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение **y = ax**. Необходимо помнить, что результатом функций **ЛИНЕЙН, ТЕНДЕНЦИЯ** является множество значений - массив.  Для расчета коэффициента корреляции используется функция **КОРРЕЛ**, возвращающая значения коэффициента корреляции:  **КОРРЕЛ(Массив1;Массив2)**  **Массив1** - массив значений **y**.  **Массив2** - массив значений **y**.  **Массив1** и **Массив2** должны иметь одинаковое количество точек данных.  **ПРИМЕР 1**. Известна табличная зависимость **G(L)**. Построить линию регрессии и вычислить ожидаемое значение в точках 0, 0.75, 1.75, 2.8, 4.5.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **L** | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | | **G** | 1 | 2,39 | 2,81 | 3,25 | 3,75 | 4,11 | 4,45 | 4,85 | 5,25 |   Введем таблицу значений в лист MS Excel и построим точечный график. Рабочий лист примет вид изображенный на рис. 2.   |  | | --- | | Рис. 8.2 | | Рис. 2 |   Для того, чтобы рассчитать значения коэффициентов регрессии **а** и **b** выделим ячейки **К2:L2**, обратимся к мастеру функций и в категории **Статистические** выберем функцию **ЛИНЕЙН**. Заполним появившееся диалоговое окно так, как показано на рис. 3 и нажмем Ок.   |  | | --- | | Рис. 8.3 | | Рис. 3 |   В результате вычисленное значение появится только в ячейке **К2** (см. рис.4). Для того чтобы вычисленное значение появилось и в ячейке **L2** необходимо войти в режим редактирования, нажав клавишу **F2**, а затем нажать комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.  Для расчета значения коэффициента корреляции в ячейку **M2** была введена следующая формула: **М2 = КОРРЕЛ(B1:J1;B2:J2)** (см. рис. 4).   |  | | --- | | Рис. 8.4 | | Рис. 4 |   Для вычисления ожидаемого значения в точках 0, 0.75, 1.75, 2.8, 4.5 занесем их в ячейки **L9:L13**. Затем выделим диапазон ячеек **M10:M13** и введем формулу:  **= ТЕНДЕНЦИЯ(B2:J2;B1:J1;L9:L13)**.  Для того чтобы вычисленные значения появились и в ячейках **M10:M13** необходимо нажать комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.   |  | | --- | | Рис. 8.5 | | Рис. 5 |   Изобразим линию регрессии на диаграмме. Для этого выделим экспериментальные точки на графике, щелкнем правой кнопкой мыши и выберем команду **Исходные данные**. В появившемся диалоговом окне (см. рис. 5), для добавления линии регрессии щелкнем по кнопке **Добавить**.  В качестве имени введем **Линия регрессии**, в качестве **Значения Х: L9:L13**, в качестве **Значения Y: M9:M13**. Далее выделяем линию регрессии, для изменения ее типа щелкаем правой кнопкой мыши и выбираем команду **Тип диаграммы** (см. рис. 6). Для форматирования линии регрессии (можно изменить толщину линии, цвет, тип маркера и т.п) дважды щелкаем по ней (см. рис. 7).   |  |  | | --- | --- | | Рис. 8.6 | Рис. 8.7 | | Рис. 6 | Рис. 7 |   После форматирования графика рабочий лист примет вид, изображенный на рис.   |  | | --- | | Рис. 8.8 | | Рис. 8 |   **Квадратичная функция**  Необходимо определить параметры функции **y = ao + a1x + a2x2**.  Составим функцию:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for11.gif |   Для этой функции запишем систему уравнений (2):   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for12.gif | (6) |   Для нахождения параметров **ao, a1, a2** необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (6).  **Кубическая функция**  Необходимо определить параметры многочлена третьей степени **y = ao + a1 x + a2 x2 + a3 x3**.  Составим функцию **S**:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for13.gif |   Система уравнений для нахождения параметров **ao, a1, a2, a3** имеет вид:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for14.gif | (7) |   Для нахождения параметров **ao, a1, a2, a3** необходимо решить систему четырёх линейных алгебраических уравнений.  Если в качестве аналитической зависимости выберем многочлен **k**-й степени **y = ao+a1x+...+ak xk**, то система уравнений для определения параметров **ai** принимает вид:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for15.gif | (8) |   **Подбор параметров функции y = a xb**  Для нахождения параметров функции **y = a xb** проведем логарифмирование функции **y: Ln y = Ln a + b Ln x**  Сделаем замену **Y = ln y; X = ln x**. Получим линейную зависимость **Y = A + b X**. Найдем коэффициенты линии регрессии **A** и **b**.определяем **a = eA**. Мы получили значение параметров функции **y = axb**.  **Подбор параметров функции y = aebx**  Прологарифмируем выражение **y = aebx: Ln y = Ln a + bx Ln e** ;  Проведём замену **Y = Ln y, A = Ln a**. Вновь получаем линейную зависимость **Y = bx+A**. Найдем **A** и **b**. Затем определим **a = eA** .  Ниже приведены замены переменных, которые преобразовывают функции вида **y = *f* (x, a, b)** к линейной зависимости **Y = Ax+B**.   |  |  | | --- | --- | | **Y = *f*(x,a,b)** | **Замена** | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for16.gif | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for17.gif | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for18.gif | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for19.gif | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for20.gif | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for21.gif |   **Подбор параметров функции y =axb ecx**  Прологарифмируем выражение **y = axb ecx**, после логарифмирования оно принимает вид:   |  |  | | --- | --- | | **Ln(y) = Ln(a)+b Ln(x)+cx Ln(e)** | (9) |   Сделаем замену **Y=Ln(y), A=Ln(a)**. После замены выражение (9) принимает вид:   |  |  | | --- | --- | | **Y = A+b Ln(x)+cx** | (10) |   Для функции (10) составим функцию **S** см. формулу (1):   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for22.gif | (11) |   Параметры **A, b** и **c** следует выбрать таким образом, чтобы функция **S** была минимальной. Необходимым условием минимума **S** являются соотношения (2). Подставим (11) в (2), и после элементарных преобразований получим систему трёх линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов **A, b** и **c**.   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for23.gif | (12) |   Решив систему (12), получим значения **A, b, c**. После чего вычисляем **a=eA**.  Построение различных аппроксимирующих зависимостей в MS Excel реализовано в виде свойства диаграммы - **линия тренда**.  **ПРИМЕР 2.** В результате эксперимента была определена некоторая табличная зависимость. Выбрать и построить аппроксимирующую зависимость. Построить графики табличной и подобранной аналитической зависимости. Вычислить ожидаемое значение в указанных точках.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **x1 = 0,1539, x2 = 0,2569, x3 = 0,28** | | | | | | | | **X** | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,20 | | **Y** | 4,4817 | 4,4930 | 5,4739 | 6,0496 | 6,6859 | 7,3891 |   Решение задачи можно разбить на следующие этапы:   1. Ввод исходных данных и построение точечного графика (см. рис. 9). 2. Добавление к этому графику линии тренда.   Рассмотрим этот процесс подробно.   |  | | --- | | Рис. 8.9 | | Рис. 9 |   Выделим экспериментальные точки на графике, щелкнем правой кнопкой мыши и воспользуемся командой **Добавить линию тренда**. Появившееся диалоговое окно (см. рис. 10) позволяет построить аппроксимирующую зависимость. На первой вкладке этого окна указывается вид аппроксимирующей зависимости (в нашем случае необходимо выбрать полиномиальную зависимость второй степени). На второй определяются параметры построения:   * Название аппроксимирующей зависимости. * Прогноз вперед (назад) на **n** единиц (этот параметр определяет, на какое количество единиц вперед (назад) необходимо продлить линию тренда). * Показывать ли точку пересечения кривой с прямой **Y = const**. * Показывать аппроксимирующую функцию на диаграмме или нет (параметр показывать уравнение на диаграмме). * Помещать ли на диаграмму величину среднеквадратичного отклонения или нет (параметр поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации).   На рис. 11 изображена полученная диаграмма.   |  |  | | --- | --- | | Рис. 8.10 | Рис. 8.10 | | Рис. 10 | |  |  | | --- | | Рис. 8.11 | | Рис. 11 |   Для расчета ожидаемых значений в точках 0.1539, 0.2569, 0.28 введем эти значения в ячейки **B4:D4**. В ячейку **B5** введем формулу подобранной аппроксимирующей зависимости (**=371.62\*B4^2-6093\*B4+6.1891**) и скопируем ее в ячейки **C5, D5**. Фрагмент рабочего листа примет вид:   |  | | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/8.13.gif |   Добавим полученные расчетные значения на диаграмму. Для этого на диаграмме выделим экспериментальные значения, щелкнем правой кнопкой мыши и выберем команду **Исходные данные**. Добавим туда **Рассчитанные значения** (см. рис. 12).   |  | | --- | | Рис. 8.12 | | Рис. 12 |   В результате диаграмма примет вид изображенный на рис. 13. Аналогично с помощью линии тренда можно подобрать и параметры других типов зависимостей (линейной, логарифмической и экспоненциальной и т. д.).   |  | | --- | | Рис. 8.13 | | Рис. 13 |   **ПРИМЕР 3.** В результате эксперимента получена зависимость **z(t)**:   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **T** | 0,66 | 0,9 | 1,17 | 1,47 | 1,7 | 1,74 | 2,08 | 2,63 | 3,12 | | **Z** | 38,9 | 68,8 | 64,4 | 66,5 | 64,95 | 59,36 | 82,6 | 90,63 | 113,5 |   Подобрать коэффициенты зависимости **Z(t)=At4+Bt3+Ct2+Dt+K** методом наименьших квадратов.  Эта задача эквивалентна задаче нахождения минимума функции пяти переменных:   |  |  | | --- | --- | | http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/for24.gif | (13) |   Введем табличную зависимость в рабочий лист MS Excel и построим график функции (см. рис.15)  Рассмотрим процесс решения задачи оптимизации (13). Пусть значения **А, В, С, D** и **К** хранятся в ячейках **K1:K5**. В ячейку **B23** введем значение функции **At4+Bt3+Ct2+Dt+K** в первой точке (ячейка **B1**):  **B23 = $K$1\*B1^4 + $K$2\*B1^3 + $K$3\*B1^2 + $K$4\*B1 + $K$5**.  Получим ожидаемое значение (в начале 0) в точке **B1**. Затем растянем эту формулу на весь диапазон **B23:J23**. В ячейку **B24** введем формулу, вычисляющую квадрат разности между экспериментальными и расчетными точками:  **B24 = (B23-B2)^2**,  и растянем ее на диапазон **B24:J24**. В ячейке **В25** будем хранить суммарную квадратичную ошибку (см. формулу 13). Для этого введем формулу:  **В25 = СУММ(B24:J24)**.  Теперь осталось с помощью решающего блока (**Сервис http://teacher.dn-ua.com/old_version/excel/Laba8/ris/strelo4ka.gifПоиск решения**) решить задачу оптимизации без ограничений, заполнив соответствующим образом появившееся диалоговое окно (рис. 14).   |  | | --- | | Рис. 8.14 | | Рис. 14 |   Результатом работы решающего блока будет вывод в ячейки **K1:K5** значений параметров функции **At4+Bt3+Ct2+Dt+K**. В ячейках **B23:J23** получим ожидаемые значение функции в исходных точках. Поместим эти точки в виде отдельной линии на графике. В ячейке B25 будет храниться суммарная квадратичная ошибка. Рис. 15 отображает внешний вид рабочего листа MS Excel после проведенных вычислений.  По мнению авторов, использование **решающего блока** - это один из эффективных способов реализации метода наименьших квадратов с помощью MS Excel.   |  | | --- | | Рис. 8.15 | | Рис. 15 | |  |  |  | |