Практическая работа «Нахождение площади фигуры»

Задача 1. Постановка задачи

Задана плоская фигура, ограниченная двумя кривыми, уравнения которых имеют вид:

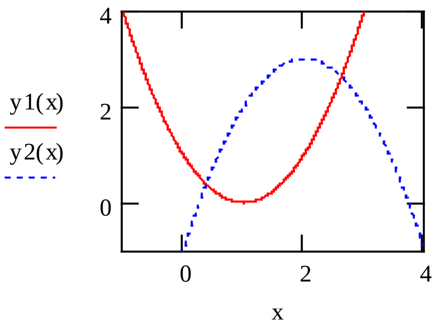
$y_1 = x^2 - 2 \cdot x + 1, y_2 = 4 \cdot x - x^2 - 1$.

Требуется разработать программу в среде Mathcad для вычисления площади указанной фигуры.

Анализ задачи

Построим графики заданных функций. В Mathcad-документе определим функции y1(x) и y2(x)

Используя меню **Вставка → График → График X-Y**, постоим графики двух заданных функций и определим фигуру, площадь которой следует вычислить. По умолчанию пределы изменения аргумента функций $[-10,10]$. Учитывая особенности заданных графиков, изменим пределы на $[-1,4]$.



Кривые пересекаются в двух точках $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ и образуют замкнутую фигуру, площадь которой необходимо вычислить.

В математическом анализе доказана теорема и представлена геометрическая интерпретация понятия определенного интеграла, а именно:

$\int_a^b f(x)dx$ есть площадь области, ограниченной кривой функции $f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a, x = b$.

Тогда искомая площадь есть разность двух интегралов:

$$s = J1 - J2 = \int_{x_1}^{x_2} y2(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} y1(x)dx.$$

Найдем пределы интегрирования. Из графиков следует, что это абсциссы точек пересечения кривых M_1 и M_2. Точки пересечения являются решением уравнения

$$x^2 - 2 \cdot x + 1 = 4 \cdot x - x^2 - 1$$

или после преобразования получим

$$x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0.$$

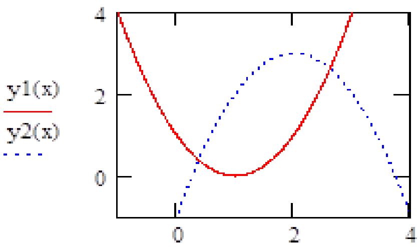
Решение задачи

В Mathcad-документе запишем:

$y1(x) := x^2 - 2x + 1$

$y2(x) := 4x - x^2 - 1$

Построим графики функций



Приравняем y1 и y2, тогда разность y1 – y2 = 0. Вычислим аналитически (**Ctrl** + **.**) эту разность.

$y1(x) - y2(x) \rightarrow 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2$

Разделим выражение на 2 и получим уравнение $x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0$

Подставим сперва в качестве x приближённое значение

x:=0

Найдём корень уравнения:

$x_1 := root\left(x^2 - 3 \cdot x + 1, x\right)$

$x_1 = 0.382$

Теперь подставим в качестве x приближённое значение

x_2:=2

$x_2 := \mathrm{root}\left(x^2 - 3\cdot x + 1, x\right)$

$x_2 = 2.618$

Получили $x_1 = 0.382, x_2 = 2.618$.

Вычисляем интегралы и площадь:

$$J1 := \int_{0.382}^{2.618} x^2 - 2\cdot x + 1 \, dx$$

$$J2 := \int_{0.382}^{2.618} 4\cdot x - x^2 - 1 \, dx$$

$S := J2 - J1 \qquad S = 3.727$

Задача 2

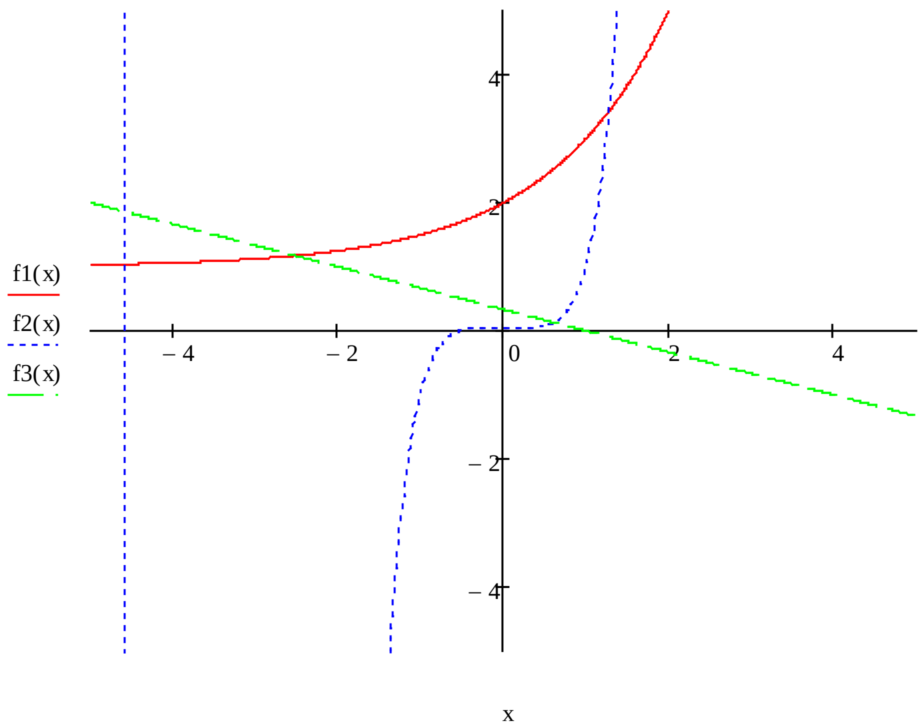
Задана плоская фигура, ограниченная тремя кривыми, уравнения которых имеют вид:

$f1(x) := 2^x + 1$

$f2(x) := x^5$

$f3(x) := \dfrac{1 - x}{3}$

Вычислить площади фигуры, ограниченной этими кривыми



Ищем точку пересечения f1(x) и f3(x)

$2^x + 1 - \dfrac{1 - x}{3} \rightarrow \dfrac{x}{3} + 2^x + \dfrac{2}{3}$

$f4(x) := \dfrac{x}{3} + 2^x + \dfrac{2}{3}$

Зададим начальное приближение x=-2

$x := -2$

$\mathrm{root}(f4(x), x) = -2.522$

Теперь ищем точку пересечения f2(x) и f3(x)

$$f5(x) := x^5 - \frac{1 - x}{3}$$

Зададим начальное приближение x=1

$x := 1 \qquad \mathrm{root}(f5(x), x) = 0.651$

Теперь ищем точку пересечения f1(x) и f2(x)

$$f6(x) := 2^x + 1 - x^5$$

$$\mathrm{root}(f6(x), x) = 1.279$$

Вычисляем интегралы

$$J1 := \int_{-2.522}^{1.279} f1(x)\,dx \qquad J1 = 7.051$$

$$J2 := \int^{0.651} f3(x)\,dx \qquad J2 = 2.047$$

$$J3 := \int_{0.651}^{1.279} f2(x)\,dx \qquad J3 = 0.717$$

Находим площадь

$$S := J1 - J2 - J3$$

$$S = 4.287$$